Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-35-43
УДК 519.6

Об одной некорректно поставленной краевой задаче для уравнения Лапласа в круговом цилиндре

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Дмитрий Юрьевич БЫКОВ, Анастасия Владимировна ЗУБАРЕНКО, Ольга Николаевна КУЛИКОВА, Дарья Алексеевна МОРОЗОВА, Евгений Владимирович ШУНИН
ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

On an ill-posed boundary value problem for the Laplace equation in a circular cylinder

Evgeniy B. LANEEV, Dmitriy Yu. BYKOV, Anastasia V. ZUBARENKO, Olga N. KULIKOVA, Darya A. MOROZOVA, Evgeniy V. SHUNIN
RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Аннотация. В работе рассматривается смешанная задача для уравнения Лапласа в области в круговом цилиндре. На боковой поверхности цилидрической области заданы однородные краевые условия первого рода. Цилиндрическую область с одной стороны ограничивает поверхность общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная. Другая граница цилиндрической области свободна. Такая задача некорректно поставлена, и для построения ее приближенного решения в случае данных Коши, известных с некоторой погрешностью, необходимо применение регуляризирующих алгоритмов. В работе рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения получено явное представление точного решения поставленной задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи для уравнения Лапласа в круге. Устойчивое решение интегрального уравнения получено методом регуляризации Тихонова. В качестве его приближенного решения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе этого решения строится приближенное решение задачи в целом. Приведена теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных. Результаты работы могут быть использованы для математической обработки данных тепловидения в медицинской диагностике.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача; уравнение Лапласа; функции Бесселя; интегральное уравнение первого рода; метод регуляризации Тихонова

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00590_а).

Для цитирования: *Ланеев Е.Б., Быков Д.Ю., Зубаренко А.В., Куликова О.Н., Морозова Д.А., Шунин Е.В.* Об одной некорректно поставленной краевой задаче для уравнения Лапласа в круговом цилиндре // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 35–43. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-35-43.

Abstract. In this paper, we consider a mixed problem for the Laplace equation in a region in a circular cylinder. On the lateral surface of a cylidrical region, the homogeneous boundary conditions of the first kind are given. The cylindrical area is bounded on one side by an arbitrary surface on which the Cauchy conditions are set, i.e. a function and its normal derivative are given. The other border of the cylindrical area is free. This problem is ill-posed, and to construct its approximate solution in the case of Cauchy data known with some error it is necessary to use regularizing algorithms. In this paper, the problem is reduced to a Fredholm integral equation of the first kind. Based on the solution of the integral equation, an explicit representation of the exact solution of the problem is obtained in the form of a Fourier series with the eigenfunctions of the first boundary value problem for the Laplace equation in a circle. A stable solution of the integral equation is obtained by the Tikhonov regularization method. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution. Based on this solution, an approximate solution of the problem in the whole is constructed. The theorem on convergence of the approximate solution of the problem to the exact one as the error in the Cauchy data tends to zero and the regularization parameter is matched with the error in the data is given. The results can be used for mathematical processing of thermal imaging data in medical diagnostics.

Keywords: ill-posed problem; Laplace equation; Bessel function; integral equation of the first kind; Tikhonov regularization method

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects no. 18-01-00590_a).

For citation: Laneev E.B., Bykov D.Yu., Zubarenko A.V., Kulikova O.N., Morozova D.A., Shunin E.V. Ob odnoy nekorrektno postavlennoy krayevoy zadache dlya uravneniya Laplasa v krugovom tsilindre [On an ill-posed boundary value problem for the Laplace equation in a circular cylinder]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 35–43. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-35-43. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается некорректно поставленная смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в круговом цилиндре с условиями Коши на поверхности общего вида. Такая задача возникает в медицинской диагностике как задача обработки термографических данных с целью выявления патологий у пациента, которые могут быть сопоставлены аномальным стационарным источниками тепла в теплопроводящей среде со стационарным распределением температуры, удовлетворяющем стационарному уравнению теплопроводности, т. е. уравнению Лапласа. Функция температуры на поверхности тела дает представление о плотности распределения источников тепла внутри тела. Как правило, такое представление сильно искажено за счет удаленности источников тепла от поверхности исследуемого тела. Уточненную информацию об источниках можно получить, анализируя распределение температуры вблизи источников, решая задачу продолжения гармонической функции с границы в сторону источников по известной функции и нормальной производной на границе. Следуя работам [1,2], в которых решена соответствующая задача для уравнения Лапласа в цилиндрической области прямоугольного сечения, краевая задача приведена к линейному интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [3]. Задача аналогична задаче продолжения поля ньютоновского потенциала с плоской поверхности [4].

1. Постановка задачи

Имеется цилиндрическая область кругового сечения

$$D(F,H) = \{(r,\varphi,z):\ 0<r<a,\ 0<\varphi<2\pi,\ F(r,\varphi)<z<H\}\,,$$

ограниченная поверхностью общего вида

$$S = \{(r,\varphi,z):\ 0<r<a,\ 0<\varphi<2\pi,\ z=F(r,\varphi)<H\}.$$

В этой области рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = 0, \quad M \in D(F,H),\\ &u|_S = f,\\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = g,\\ &u|_{r=a} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

включающую условия Коши на поверхности S и однородные условия первого рода на боковой поверхности цилиндра. Граница $z=H$ открыта.

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u \in C^2(D(F,H))\bigcap C^1(\overline{D(F,H)})$.

Смешанная задача (1.1) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g. Получим явное выражение точного решения задачи в зависимости от точных данных Коши f и g.

2. Точное решение краевой задачи

Пусть $\varphi(M,P)$ — функция источника первой краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} &\Delta v(P) = -\rho(P), \quad P \in D^\infty,\\ &v|_{r=a} = 0,\\ &v \to 0 \text{ при } |z| \to \infty. \end{aligned}$$

в бесконечном круговом цилиндре

$$D^\infty = \{(r,\varphi,z):\ 0<r<a,\ 0<\varphi<2\pi,\ -\infty<z<\infty\}. \tag{2.1}$$

Функция источника есть сумма фундаментального решения уравнения Лапласа и гармонической по P функции $W(M,P)$

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M,P), \tag{2.2}$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P и удовлетворяет граничным условиям. Функция источника (2.2) может быть представлена в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа в круге

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_n \exp\{-\frac{\mu_n^k}{a}|z_M - z_P|\}\frac{J_n(\mu_n^k\frac{r_M}{a})J_n(\mu_n^k\frac{r_P}{a})}{\mu_n^k a[J_n'(\mu_n^k)]^2}\cos n(\varphi_M-\varphi_P),$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0.$$

Здесь J_n — функция Бесселя, μ_n^k, $k = 1, 2, 3, \dots$ — нули функции J_n.

Пусть $M \in D(F, H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции источника $\varphi(M, P)$, получим

$$u(M) = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H). \tag{2.3}$$

Учитывая однородные граничные условия для φ и u на боковой поверхности цилиндрической области $D(F, H)$, получим

$$u(M) = \int\limits_{S} \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P + \\ + \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \tag{2.4}$$

где второй интеграл берется по кругу

$$\Pi(H) = \{(r, \varphi, z) : \ 0 < r < a, \ 0 < \varphi < 2\pi, \ z = H\}. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\Phi(M) = \int\limits_{S} \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.6}$$

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.7}$$

тогда решение задачи (1.1) получим в виде

$$u(M) = v(M) + \Phi(M), \quad M \in D(F, H), \tag{2.8}$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g.

Функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{array}{l} \Delta v(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ v|_{z=H} = v_H, \\ v|_{r=a} = 0, \\ v \to 0 \ \text{при} \ z \to -\infty. \end{array}$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.1) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье

$$v(M) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{\frac{\mu_n^k}{a}(z_M - H)\} J_n(\mu_n^k \frac{r}{a})[(\tilde{v}_H)^c_{nk}\cos n\varphi - (\tilde{v}_H)^s_{nk}\sin n\varphi], \tag{2.9}$$

$$(\tilde{v}_H)^c_{nk} = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2 [J_n'(\mu_n^k)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^k \frac{r}{a}) \cos n\varphi, \\ \epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{при} \ n \neq 0, \\ (\tilde{v}_H)^s_{nk} = \frac{2}{\pi a^2 [J_n'(\mu_n^k)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^k \frac{r}{a}) \sin n\varphi. \tag{2.10}$$

Ряд (2.9) сходится равномерно области $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$\left|(\tilde{v}_H)^c_{nk} \exp\{\frac{\mu^k_n}{a}(z_M - H)\} J_n(\mu^k_n \frac{r}{a}) \cos n\varphi\right| \leqslant \left|(\tilde{v}_H)^c_{nk}\right| \exp\{\frac{\mu^k_n}{a}\varepsilon\},$$

и аналогичная оценка справедлива и для $(\tilde{v}_H)^s_{nk}$.

Таким образом, из представления (2.8) решения задачи (1.1) и представления (2.9) функции v следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.1) достаточно выразить функцию v_H в (2.9) через заданные функции f и g.

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \{(r, \varphi, z) : 0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < F(r, \varphi)\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции $\varphi(M, P)$ вида (2.2), аналогично (2.3), получим

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M, P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для φ и u и обозначений (2.6) и (2.7) получим

$$v(M) = -\Phi(M), \quad M \in D(-\infty, F). \tag{2.11}$$

Из (2.9), (2.10) функция v может быть выражена через v_H в виде интеграла

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} G(M, P) v_H(P) r_P dr_P d\varphi_P, \quad M \in D(-\infty, H), \tag{2.12}$$

где

$$G(M, P) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\frac{\mu^k_n}{a}|z_M - z_P|\} \frac{J_n(\mu^k_n \frac{r_M}{a}) J_n(\mu^k_n \frac{r_P}{a})}{a^2 [J'_n(\mu^k_n)]^2} \cos n(\varphi_M - \varphi_P), \tag{2.13}$$
$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0.$$

Пусть $b < \min\limits_{(r,\varphi)} F(r, \varphi)$ и $M \in \Pi(b)$, где $\Pi(b)$ — область вида (2.5) при $z = b$, тогда из (2.11) и (2.12) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{\Pi(H)} G(M, P) v_H(P) dx_P dy_P = -\Phi(M), \quad M \in \Pi(b). \tag{2.14}$$

Из уравнения (2.14) с учетом разложения (2.13) при $z_M = b$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$\begin{aligned} -(\tilde{v}_H)^c_{nk} \exp\{-\frac{\mu^k_n}{a}(H - b)\} &= \tilde{\Phi}^c_{nk}(b), \\ -(\tilde{v}_H)^s_{nk} \exp\{-\frac{\mu^k_n}{a}(H - b)\} &= \tilde{\Phi}^s_{nk}(b), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\tilde{\Phi}^c_{nk}(b), \tilde{\Phi}^s_{nk}(b)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M\in\Pi(b)}$:

$$(\tilde{\Phi})^c_{nk}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J'_n(\mu^k_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r,\varphi,b) J_n(\mu^k_n \frac{r}{a}) \cos n\varphi,$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0,$$

$$(\tilde{\Phi})^s_{nk}(b) = \frac{2}{\pi a^2[J'_n(\mu^k_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r,\varphi,b) J_n(\mu^k_n \frac{r}{a}) \sin n\varphi.$$

Отметим, что формулы (2.15) характеризуют убывание коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_{nm}(b)$ с ростом n и k, если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.1) и, следовательно, — функции v_H вида (2.9). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde{v}_H)_{nm}$ из (2.15) в ряд (2.9), получим функцию v в области $D(-\infty, H)$

$$v(M) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{\frac{\mu^k_n}{a}(H-b)\} J_n(\mu^k_n \frac{r}{a})[(\tilde{\Phi})^c_{nk}(b)\cos n\varphi - (\tilde{\Phi})^s_{nk}(b)\sin n\varphi]. \tag{2.16}$$

Ряд (2.16), как и ряд (2.9), сходится равномерно в $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, если решение задачи (1.1) существует при данных f и g.

Формула (2.8), где функции v и Φ вида (2.16) и (2.6) соответственно, дает явное выражение для решения задачи (1.1).

3. Построение приближенного решения задачи в случае приближенных данных Коши

Пусть функции f и g в задаче (1.1) заданы с погрешностью, то есть вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ, такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leqslant \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.1), сходящееся к точному решению при $\delta \to 0$. Функция Φ вида (2.6) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_S \Big[g^\delta(P)\varphi(M,P) - f^\delta(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P. \tag{3.1}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.6) при

$$M \in \Pi(b), \quad b < \min_{(r,\varphi)} F(r,\varphi),$$

получим оценку погрешности правой части интегрального уравнения (2.14)

$$|\Phi^\delta(M) - \Phi(M)| \leqslant \max_{M\in\Pi(b)} \Big(\int\limits_S \varphi^2(M,P)d\sigma_P\Big)^{1/2} \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} +$$

$$+ \max_{M\in\Pi(b)} \Big(\int\limits_S \big[\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\big]^2 d\sigma_P\Big)^{1/2} \|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant C\delta.$$

В качестве приближенного решения интегрального уравнения (2.14) с приближенной правой частью (3.1) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [3] со стабилизатором нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \left\|Gw - \Phi^\delta\right\|^2_{L_2(\Pi(b))} + \alpha\|w\|^2_{L_2(\Pi(H))},\ \alpha > 0. \tag{3.2}$$

Экстремаль функционала может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.2)

$$G^*Gw + \alpha w = G^*\Phi^\delta,$$

которое, в свою очередь, с использованием разложения (2.13) ядра интегрального оператора G, может быть представлено в виде алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье функции w

$$\exp\{-2\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\}\tilde{w}_{nk} + \alpha\tilde{w}_{nk} = -\exp\{-\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\}\tilde{\Phi}^\delta_{nk}(b), \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{\Phi}^\delta_{nk}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^c_{nk}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^k)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi^\delta(r,\varphi,b) J_n(\mu_n^k\frac{r}{a})\cos n\varphi,$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{при} \ n \neq 0,$$

$$\tilde{\Phi}^\delta_{nk}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^s_{nk}(b) = \frac{2}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^k)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi^\delta(r,\varphi,b) J_n(\mu_n^k\frac{r}{a})\sin n\varphi,$$

— коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M\in\Pi(b)}$.

Решая алгебраические уравнения относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя экстремаль w^δ_α вместо v_H в (2.9), найдем приближение v^δ_α к функции v в области $D(-\infty, H)$:

$$v^\delta_\alpha(M) = -\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^\infty \frac{\exp\{\frac{\mu_n^k}{a}(z_M - b)\}}{1+\alpha\exp\{2\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\}} J_n(\mu_n^k\frac{r}{a})[(\tilde{\Phi}^\delta)^c_{nk}(b)\cos n\varphi - (\tilde{\Phi}^\delta)^s_{nk}(b)\sin n\varphi]. \tag{3.4}$$

Функция (3.4) отличается от точной функции v вида (2.16) регуляризирующим множителем $(1+\alpha\exp\{2\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\})^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствии с (2.8) приближенное решение задачи (1.1) получим в виде

$$u^\delta_\alpha(M) = v^\delta_\alpha(M) + \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F,H), \tag{3.5}$$

где v^δ_α и Φ^δ — функции вида (3.4) и (3.1) соответственно.

Для приближенного решения (3.5) имеет место

Теорема 3.1. *Пусть решение задачи (1.1) существует. Тогда для любого $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$ функция $u_{\alpha(\delta)}$ вида (3.5) равномерно сходится при $\delta \to 0$ к точному решению в $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0,5(H - \max\limits_{(r,\varphi)} F(r,\varphi))$.*

Доказательство теоремы повторяет доказательство соответствующей теоремы в [1].

Формулы (3.5), (3.4) и (3.1) решают поставленную задачу (1.1).

4. Приложение результатов к обратной задаче термографии

Построенное решение задачи (1.1) может быть использовано для решения обратной задачи термографии [5] в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине [6]. При моделировании участка тела пациента к задаче (1.1) приводит модель теплопроводящего тела цилиндрической формы, содержащего стационарные источники тепла. На боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура, что соответствует первому краевому условию в (1.1), а на поверхности S имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, описываемый законом Ньютона. В этом случае поток тепла через поверхность S, т. е. нормальная производная, прямо пропорционален разности температур внутри тела и снаружи, что соответствует третьему краевому условию. Если распределение температуры на поверхности S может быть измерено как функция f, например, тепловизионными методами, то в рамках описанной модели оказывается известной и нормальная производная, что приводит к рассмотренной здесь задаче (1.1) восстановления пространственного распределения температуры, аномалии которого могут быть связаны с патологиями внутренних органов пациента.

References

[1] Е. Б. Ланеев, Б. Васудеван, “Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа”, *Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика*, 1999, № 1, 128–133. [E. B. Laneev, B. Vasudevan,, “On a stable solution of a mixed problem for the Laplace equation”, *PFUR Reports. Series: Applied Mathematics and Computer Science*, 1999, № 1, 128–133 (In Russian)].

[2] Е. Б. Ланеев, “О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 483–491; англ. пер.:E. B. Laneev, “Construction of a Carleman function based on the Tikhonov regularization method in an ill-posed problem for the Laplace equation”, *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 476–485.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. YA. Arsenin, *Metody Resheniya Nekorrektnyh Zadach*, Nauka, M., 1979 (In Russian)].

[4] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, “О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации”, *Изв. АН СССР. Физика Земли*, 1968, № 1, 30–48. [A. N. Tikhonov A.N., V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, V. R. Melikhov, “O prodolzhenii potentsiala v storonu vozmushchayushchikh mass na osnove metoda regulyarizatsii”, *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, 1968, № 1, 30–48 (In Russian)].

[5] Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, “Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе.”, *Вестник РУДН. Серия Математика*, **10**:1 (2003), 100–110. [E. B. Laneev, M. N. Muratov,, “Ob odnoy obratnoy zadache k kraevoy zadache dlya uravneniya Laplasa s usloviem tret’ego roda na netochno zadannoy granitse”, *PFUR Reports. Series: Mathematics*, **10**:1 (2003), 100–110 (In Russian)].

[6] Г. Р. Иваницкий, “Тепловидение в медицине”, *Вестник РАН.*, **76**:1 (2006), 48–58. [G. R. Ivanitskii, “Thermovision in medicine”, *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **76**:1 (2006), 48–58 (In Russian)].

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Быков Дмитрий Юрьевич, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Зубаренко Анастасия Владимировна, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zubarana18@gmail.com

Куликова Ольга Николаевна, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: helyakulikova@gmail.com

Морозова Дарья Алексеевна, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: dasha m96@mail.ru

Шунин Евгений Владимирович, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: shunin e@mail.ru

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Ланеев Евгений Борисович
E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.06.2020 г.
Поступила после рецензирования 08.09.2020 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Dmitriy Yu. Bykov, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Anastasia V. Zubarenko, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation.
E-mail: zubarana18@gmail.com

Olga N. Kulikova, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: helyakulikova@gmail.com

Darya A. Morozova, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: dasha m96@mail.ru

Evgeniy V. Shunin, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: shunin e@mail.ru

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgeniy B. Laneev
E-mail: elaneev@yandex.ru

Received 06.06.2020
Reviewed 08.09.2020
Accepted for press 05.03.2021